E.N.S. SEVRES & ULM 1979

**Groupe A**

# DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans ce problème, si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes, et A une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on note $\sum_{n\in A} u_n$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, où $v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

## I

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $\zeta(s)$ (resp. $\zeta_2(s)$) la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \left(\text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right)$$

lorsque celle-ci converge.

1° Pour quelles valeurs de $s$ la série $\zeta(s)$ (resp. $\zeta_2(s)$) est-elle convergente? Montrer que la fonction $s \longmapsto \zeta(s)$ (resp. $s \longmapsto \zeta_2(s)$) est dérivable dans l'intervalle $]1, \infty[$ (resp. $]0, \infty[$).

2° Calculer $\zeta_2(1)$. Exprimer $\zeta_2(s)$ en fonction de $\zeta(s)$. Montrer que la fonction $s \longmapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge en une fonction continue dans l'intervalle $]0, \infty[$.



## II

Soit G un groupe abélien fini (noté multiplicativement).

On note $\hat{G}$ le groupe (noté aussi multiplicativement) des homomorphismes de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls.

On note $h$ le PPCM des ordres des éléments de G, et $g$ le nombre d'éléments de G.

1° Préciser la loi de groupe de $\hat{G}$.

2° Déterminer $\hat{G}$ dans le cas où G est un groupe cyclique.

3° Soit $H \subset G$ un sous-groupe tel que $G/H$ soit cyclique.

Montrer que tout élément $\alpha \in \hat{H}$ se prolonge en un élément de $\hat{G}$.

4° Le résultat précédent est-il encore vrai si on ne suppose pas $G/H$ cyclique?

5° Soit $H \subset G$ un sous-groupe. On note $r : \hat{G} \longrightarrow \hat{H}$ l'application qui à $\alpha \in \hat{G}$ associe la restriction $r(\alpha)$ de $\alpha$ à H. Étudier l'application $r$; déterminer son noyau, et le comparer à $\widehat{G/H}$.

Montrer que G et $\hat{G}$ ont même nombre d'éléments.

Quel est l'ensemble des valeurs prises par les éléments $\alpha \in \hat{G}$?

6° Soit $\alpha \in \hat{G}$ tel que $\alpha \neq 1$ (où 1 désigne l'élément neutre de $\hat{G}$). Soit $x \in G$ tel que $\alpha(x) \neq 1$.

Comparer $\sum_{y\in G} \alpha(xy)$ et $\sum_{y\in G} \alpha(y)$. Quelle est la valeur de $\sum_{y\in G} \alpha(y)$?

7° A tout $x \in G$ on associe l'application $\rho_x$ de $\hat{G}$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par $\rho_x(\alpha) = \alpha(x)$. L'application $x \longmapsto \rho_x$ est-elle un isomorphisme de groupes de G dans $\hat{\hat{G}}$?

Calculer la somme $\sum_{\alpha\in\hat{G}} \alpha(x)$ pour $x \in G$.

.../...

## III

Soit $m$ un entier naturel ($m > 0$), fixé pour toute la suite du problème. On note $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ le groupe multiplicatif des classes d'entiers mod. $m$ inversibles, et on note $g$ le nombre d'éléments de G. Si $x \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{x}$ la classe de $x$ mod. $m$. On rappelle qu'on a $\bar{x} \in G$ si et seulement si $x$ et $m$ sont premiers entre eux.

On note $\mathfrak{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_{a,m} \subset \mathfrak{P}$ l'ensemble des nombres premiers congrus à $a$ mod. $m$.

Pour tout $\chi \in \hat{G}$, on note $\tilde{\chi}$ l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\tilde{\chi}(x) = \begin{cases} \chi(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in G \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier on note $\chi_0$ l'élément neutre de $\hat{G}$, de sorte qu'on a

$$\tilde{\chi}_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in G \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $s$ un nombre réel. On note $L_\chi(s)$ la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(n)}{n^s}$, lorsque cette série converge.

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites de nombres complexes.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Vérifier qu'on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = S_n v_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}).$$

1° Déterminer le domaine de convergence de la série $L_\chi(s)$.

2° Soit $A \subset \mathfrak{P}$ un ensemble fini non vide de nombres premiers, et $n$ un entier strictement positif. On note $\mathbb{N}_A \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont les facteurs premiers appartiennent à A, et $\mathbb{N}_{A,n}$ l'ensemble (fini) des entiers naturels de la forme $\prod_{j=1}^{N} p_j^{m_j}$, où N est le nombre d'éléments de A, $p_1, \dots p_N$ désignent les éléments de A, et les $m_j$ sont entiers, avec $0 \leqslant m_j \leqslant n$.



Comparer, pour $s > 1$, les nombres $\sum_{k \in \mathbb{N}_A} \frac{\tilde{\chi}(k)}{k^s}$, $\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_{A,n}} \frac{\tilde{\chi}(k)}{k^s}$, et $\prod_{p \in A} \left(1 - \frac{\tilde{\chi}(p)}{p^s}\right)^{-1}$.

3° On note $\mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}$ l'ensemble des nombres premiers $p$ tels que $p \leqslant n$, et on note $\prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{\tilde{\chi}(p)}{p^s}\right)^{-1}$ la limite, si elle existe, des produits finis $\prod_{p \in \mathfrak{P}_n} \left(1 - \frac{\tilde{\chi}(p)}{p^s}\right)^{-1}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

Comparer, pour $s > 1$, $L_\chi(s)$ et $\prod_{p \in \mathfrak{P}} \left(1 - \frac{\tilde{\chi}(p)}{p^s}\right)^{-1}$.

4° Comparer $L_{\chi_0}(s)$ et $\zeta(s)$ (où $\zeta(s)$ est défini au I).

## IV

*Dans cette partie, on conservera les notations du III et on utilisera, sans le démontrer, que $L_\chi(1)$ est non nul si $\chi$ est différent de $\chi_0$, résultat qui sera établi dans la partie V.*

Si A est une partie de $\mathfrak{P}$, on dira que A est de densité $d$ si

$$\lim_{\substack{s \to 1 \\ s > 1}} \frac{\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}}{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{s-1}\right)} = d.$$

1° Déterminer la densité de $\mathfrak{P}$. On pourra vérifier au préalable qu'on a, pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $t \leqslant \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-t}\right) \leqslant t + t^2$.

.../...

2° Soit $s \longmapsto f(s)$ une fonction continue pour $s > 1$, à valeurs complexes. On suppose que la fonction $g(s) = \exp(f(s))$ a une limite non nulle pour $s \longrightarrow 1$, $s > 1$. Montrer que $f(s)$ a une limite pour $s \longrightarrow 1$, $s > 1$.

3° Pour $z$ complexe, $|z| < 1$, on définit $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ par

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

On a $\exp\left(\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) = \frac{1}{1-z}$.

Montrer que, pour $\chi \neq \chi_0$, il existe une fonction $f_\chi(s)$, continue pour $s \geqslant 1$, telle que $\exp(f_\chi(s)) = L_\chi(s)$.

Montrer que, pour $\chi \neq \chi_0$, la série $\sum_{p \in \mathfrak{P}} \frac{\tilde{\chi}(p)}{p^s}$ a une limite finie pour $s \longrightarrow 1$, $s > 1$.

4° Pour $\chi \in \hat{G}$, on pose $S_\chi(s) = \sum_{p \in \mathfrak{P}} \frac{\tilde{\chi}(p)}{p^s}$. Comparer lorsque $a$ et $m$ sont premiers entre eux, et pour $s > 1$,

$$\sum_{p \in \mathfrak{P}_{a,m}} \frac{1}{p^s} \quad \text{et} \quad \sum_{\chi \in \hat{G}} \tilde{\chi}(a)^{-1} S_\chi(s)$$ (où $\mathfrak{P}_{a,m}$ est l'ensemble défini au III).

5° Quelle est la densité de $\mathfrak{P}_{a,m}$ si $a$ et $m$ sont premiers entre eux ? Montrer que $\mathfrak{P}_{a,m}$ est alors infini.

## V

*On conserve les notations de* III, IV.

1° Soient $a$, $b$, $c$ trois entiers, et $\chi \in \hat{G}$. Montrer que la quantité

$$\mathrm{Log}\left|L_{\chi_0}^{a}(s)\, L_\chi^{b}(s)\, L_{\chi^2}^{c}(s)\right| - \sum_{p \in \mathfrak{P}} \frac{\mathrm{Re}\left[a + b\,\tilde{\chi}(p) + c\,\tilde{\chi}(p^2)\right]}{p^s}$$

reste bornée pour $s \longrightarrow 1$, $s > 1$.



2° Montrer qu'on a $\mathrm{Re}\,(3 + 4u + u^2) \geqslant 0$ pour tout nombre complexe $u$ tel que $|u| = 1$.

3° Montrer que $L_{\chi_0}^{3}(s)\, L_\chi^{4}(s)\, L_{\chi^2}(s)$ ne peut pas tendre vers 0 pour $s \longrightarrow 1$, $s > 1$. Montrer qu'on a $L_\chi(1) \neq 0$ si $\chi \neq \chi_0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail